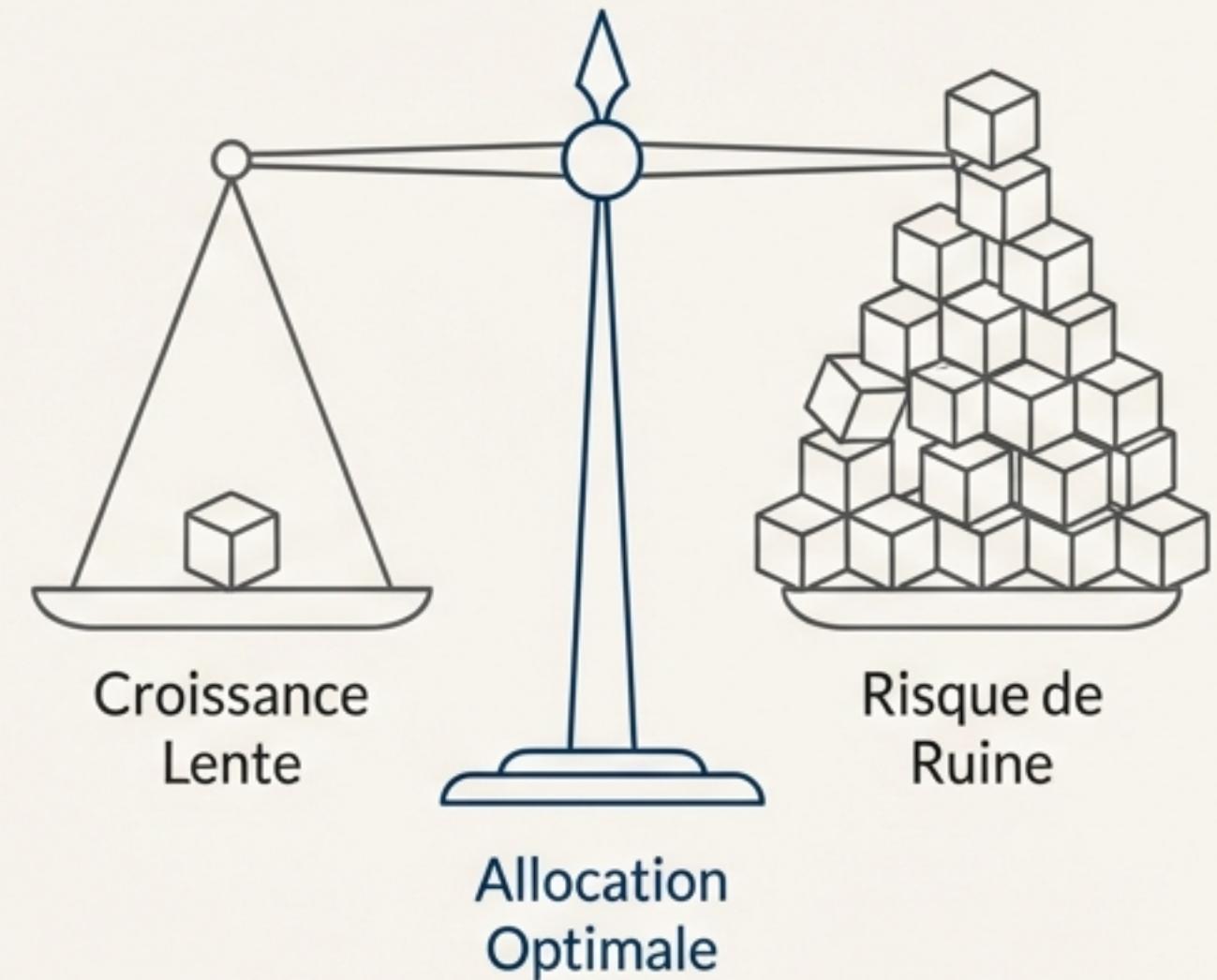


# La question fondamentale : non pas *quoi* choisir, mais *combien* miser.

La plupart des investisseurs et des parieurs se concentrent sur l'identification d'opportunités gagnantes. Cependant, la question la plus critique pour la croissance à long terme du capital est la gestion du risque à travers le dimensionnement des positions (« position sizing »).

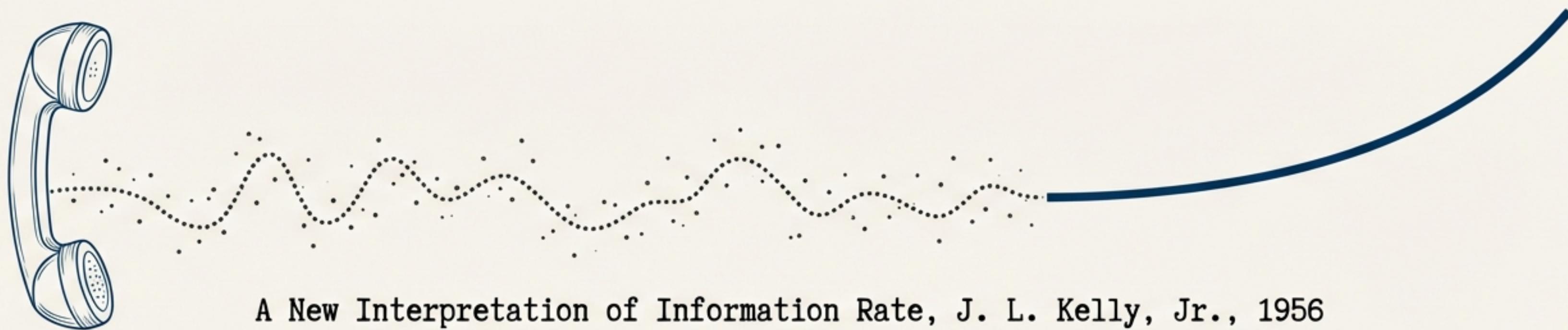
- **Le problème cardinal :** Trouver des opportunités rentables est la première étape. La seconde, plus difficile et plus conséquente, est de décider quelle part de son capital allouer à chaque opportunité.
- **L'équilibre délicat :** Une mise trop faible ralentit la croissance potentielle. Une mise trop agressive augmente de façon spectaculaire le risque de ruine, même avec un avantage statistique.
- **La promesse de Kelly :** Le Critère de Kelly offre une solution mathématique pour déterminer la proportion optimale du capital à risquer afin de maximiser le taux de croissance géométrique à long terme. C'est un cadre pour transformer un avantage (« edge ») en croissance exponentielle durable.



# L'origine : de la théorie de l'information à la maximisation du capital

En 1956, le scientifique John L. Kelly Jr., travaillant aux Bell Labs, a publié un article fondateur : « A New Interpretation of Information Rate ». Son objectif n'était pas initialement de créer une stratégie de pari, mais de résoudre un problème lié à la transmission de données sur des canaux de communication bruités.

- **Le lien avec Claude Shannon** : Kelly a démontré que le taux de croissance exponentiel maximal du capital d'un parieur informé est égal au débit d'information du canal lui transmettant l'information.
- **La découverte clé** : La formule quantifie la valeur économique de l'information. Elle transforme la connaissance d'une probabilité avantageuse en une stratégie d'allocation de capital optimale.
- **L'objectif fondamental** : Maximiser la valeur attendue du logarithme du capital. Cette approche maximise le taux de croissance géométrique à long terme, priorisant la capitalisation composée et la survie du portefeuille sur le long terme, par opposition à la maximisation du rendement arithmétique qui mène inévitablement à la ruine.



# La formule de Kelly : une équation pour la croissance optimale.

Pour un pari binaire simple (gain ou perte totale de la mise), la formule de Kelly est d'une simplicité remarquable. Elle calcule la fraction optimale ( $f^*$ ) du capital actuel à miser.

$$f^* = \frac{bp - q}{b}$$

## ✓ p (Probabilité de gain)

Votre estimation de la probabilité de succès. C'est la variable la plus critique et la plus difficile à estimer.

## ✗ q (Probabilité de perte)

La probabilité de l'échec, calculée simplement comme  $1 - p$ .

## \$ b (Cote nette)

Le gain net reçu pour chaque unité misée.  
Pour une cote décimale de 2.50,  $b = 1.5$ .  
Pour une cote fractionnaire de 4/1,  $b = 4$ .

## Exemple Pratique

Vous estimatez qu'un cheval a 25 % de chances de gagner ( $p = 0.25$ ), et donc 75 % de chances de perdre ( $q = 0.75$ ). Le bookmaker offre une cote de 4/1 ( $b = 4$ ).

$$f^* = \frac{(4 \times 0.25) - 0.75}{4} = \frac{1 - 0.75}{4} = \frac{0.25}{4} = 0.0625$$

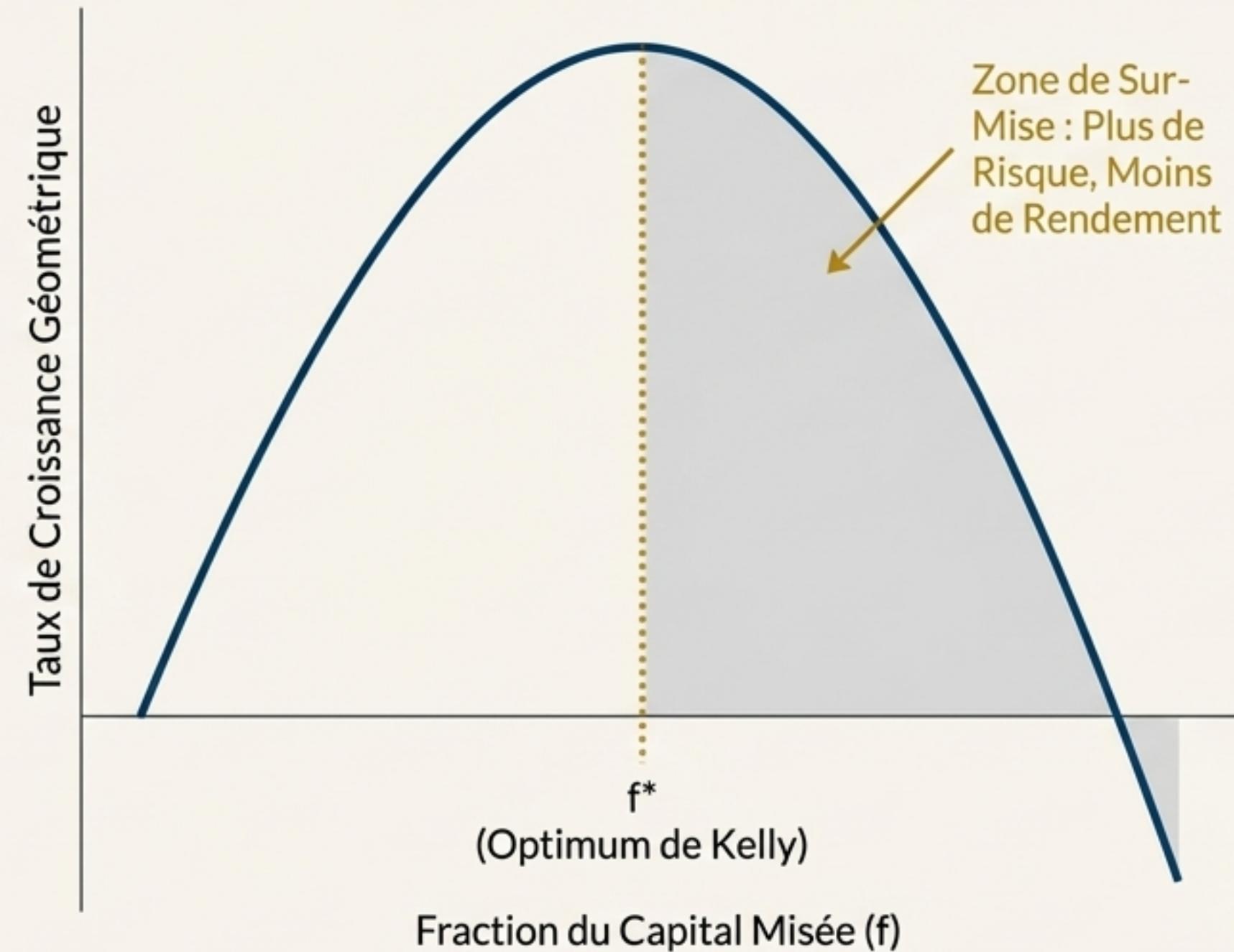
Résultat : La formule de Kelly suggère de miser 6,25 % de votre capital total.

# La courbe de Kelly : le point de bascule entre croissance et destruction.

La relation entre la fraction du capital misée et le taux de croissance géométrique n'est pas linéaire. Elle est décrite par une courbe concave qui révèle un principe fondamental mais contre-intuitif.

- **La montée** : En partant de zéro, augmenter la taille de la mise augmente le taux de croissance attendu du capital.
- **Le sommet ( $f^*$ )** : Il existe un point unique, l'optimum de Kelly, où le taux de croissance est maximisé.
- **La descente dangereuse** : Au-delà de ce point, toute augmentation de la mise diminue le taux de croissance attendu, tout en augmentant la volatilité. Miser le double de l'optimum de Kelly, par exemple, peut ramener le taux de croissance à zéro, voire le rendre négatif.

Miser plus que la fraction de Kelly est irrationnel : cela augmente le risque pour un rendement attendu inférieur.



# Le talon d'Achille : la formule est parfaite, ses données ne le sont pas.

L'efficacité du critère de Kelly repose entièrement sur la précision de ses deux variables clés : la cote nette ( $b$ ) et la probabilité de gain ( $p$ ). Si la cote  $b$  peut être calculée avec une certaine précision, l'estimation de  $p$  est le défi majeur et la source principale d'échec.

- **L'illusion de la certitude** : Dans des jeux comme la roulette ou les dés,  $p$  est connu. En investissement ou dans les paris sportifs,  $p$  doit être estimé.
- **Le risque de surestimation** : Une surestimation même légère de  $p$  conduit à une fraction  $f^*$  supra-optimale. Le résultat est une sur-mise systématique, ce qui augmente de façon exponentielle le risque de ruine et détruit la croissance à long terme.
- **Le principe de prudence** : Un professionnel doit toujours supposer que sa méthode d'évaluation de  $p$  est imparfaite et contient une marge d'erreur. La stratégie d'allocation doit refléter cette incertitude.



« En hippisme, il serait beaucoup plus prudent de supposer que votre méthode d'évaluation des cotes réelles est imparfaite et erronée. Elle peut être bonne. Très bonne. Cependant, elle sera éternellement imparfaite. » - Mathematician Betting

# L'adaptation professionnelle : le Kelly Fractionnaire pour la robustesse.

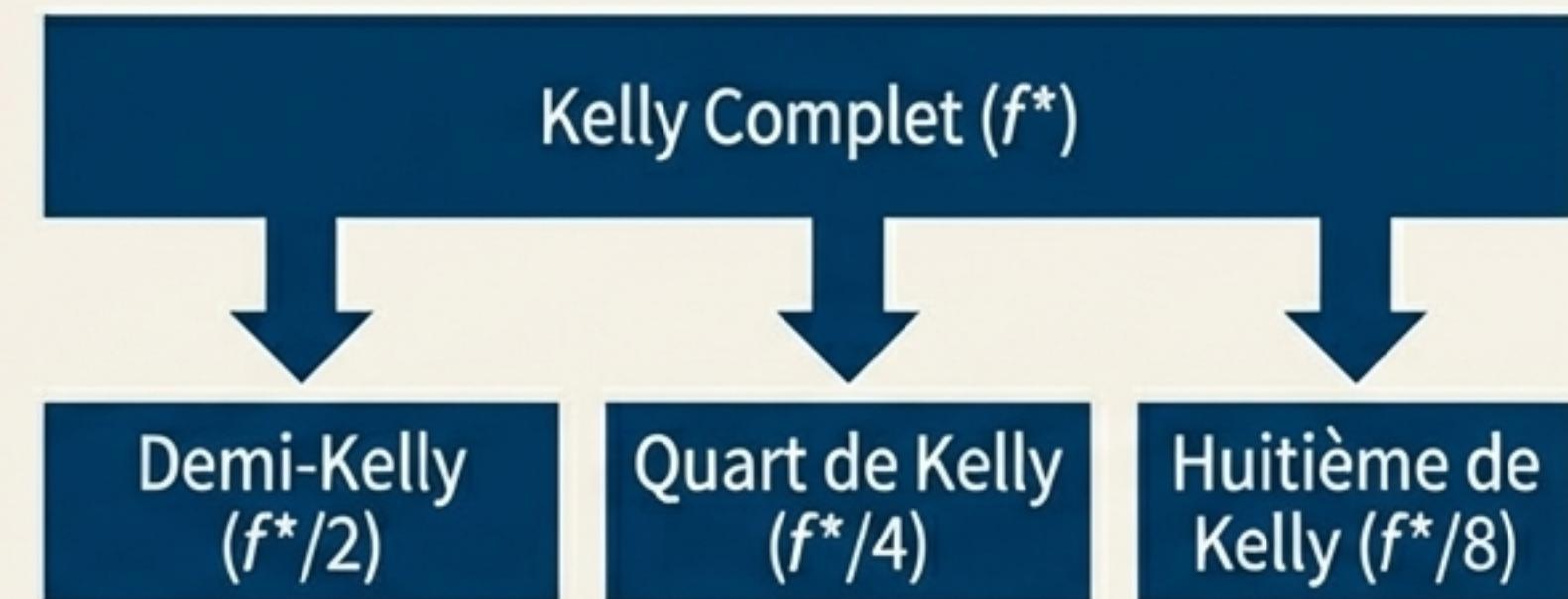
Face à l'incertitude inhérente à l'estimation de  $p$ , les praticiens chevronnés n'appliquent que très rarement la fraction de Kelly complète. La norme est d'utiliser une approche fractionnaire.

## Définition :

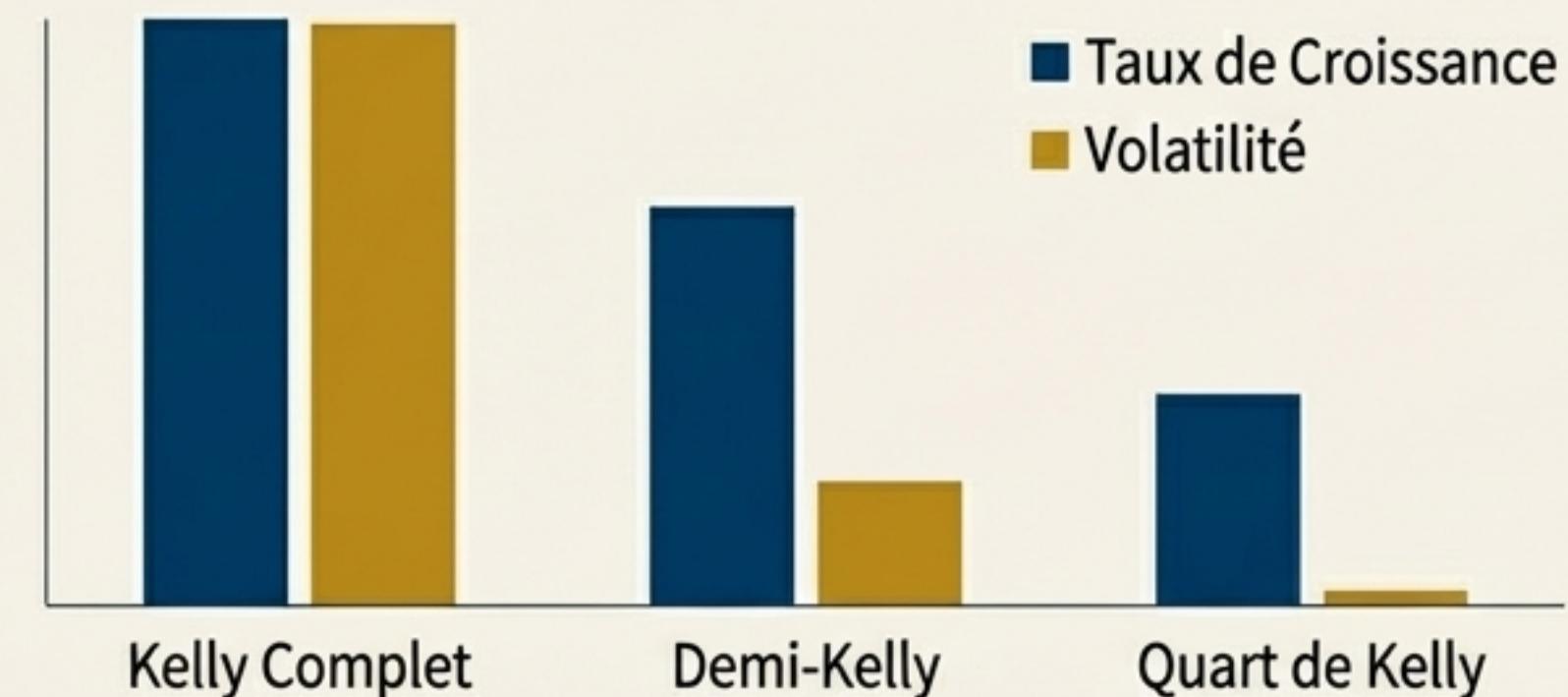
- Le Kelly Fractionnaire consiste à miser une proportion fixe (par exemple, 50 % ou 25 %) de la fraction  $f^*$  calculée.
- Demi-Kelly ( $1/2 K$ ) : Mise =  $f^* / 2$
- Quart de Kelly ( $1/4 K$ ) : Mise =  $f^* / 4$
- Huitième de Kelly ( $1/8 K$ ) : Mise =  $f^* / 8$

## Les deux avantages principaux :

1. **Marge de sécurité** : Le Kelly Fractionnaire agit comme une protection structurelle contre la surestimation de  $p$ , réduisant considérablement le risque de sur-mise catastrophique.
2. **Réduction de la volatilité** : Cette approche diminue fortement la variance du portefeuille et les pertes maximales (« drawdowns »). En sacrifiant une petite partie de la croissance théorique maximale, le parieur assure la survie de son capital sur le long terme.



## Compromis Croissance vs. Volatilité

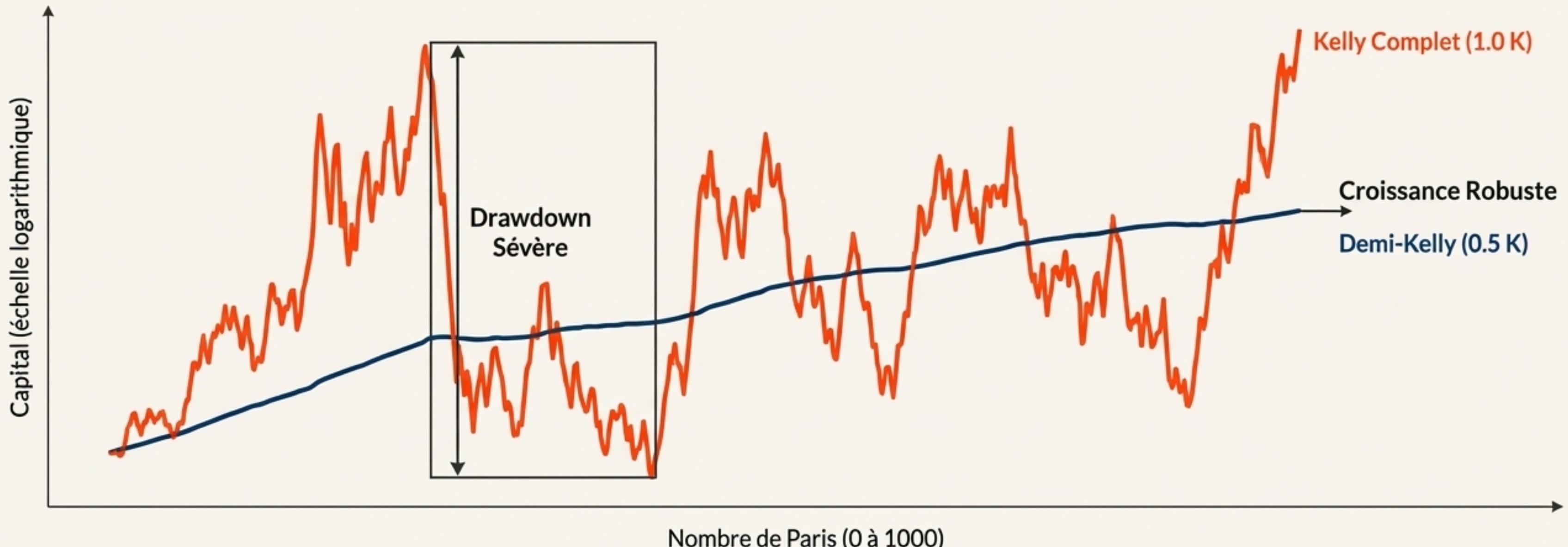


# Visualisation de la volatilité : Kelly Complet vs. Kelly Fractionnaire

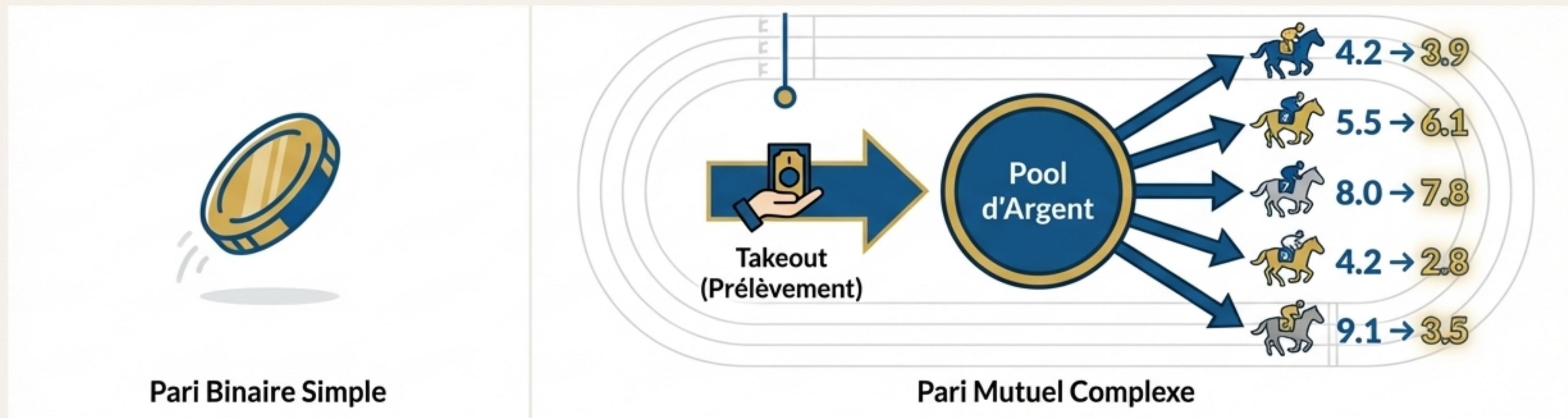
Une simulation de 1 000 paris successifs avec un avantage statistique constant illustre de manière frappante la différence de comportement du capital.

- \* Le chemin du Kelly Complet (1.0 K) : La croissance est, en moyenne, la plus rapide. Cependant, le parcours est extrêmement volatile, avec des « drawdowns » profonds et fréquents qui peuvent être psychologiquement insoutenables et menacer la survie du capital.
- \* Le chemin du Demi-Kelly (0.5 K) : Le taux de croissance à long terme est légèrement inférieur, mais le parcours du capital est beaucoup plus régulier. Les « drawdowns » sont moins profonds et moins fréquents, ce qui permet de maintenir la stratégie sur le long terme sans risque de ruine.
- \* Le chemin du Tiers de Kelly (0.3 K) : Le compromis optimal. Cette approche conserve 51 % du profit optimal du Kelly complet, mais avec seulement 1/11ème de la variance.

La gestion de la volatilité est aussi importante que la maximisation de la croissance.



# Étude de cas : l'épreuve ultime du Critère de Kelly dans les courses hippiques.



Pour tester la robustesse des principes de Kelly, nous nous tournons vers l'un des environnements de pari les plus complexes : les courses hippiques à pari mutuel. Ce système présente des défis uniques qui vont bien au-delà d'un simple pari binaire.

- **Le « Takeout » (Prélèvement)** : Une commission (souvent > 15 %) est prélevée sur la masse totale des enjeux avant la distribution des gains. L'avantage du parieur doit être suffisamment important pour surmonter ce coût structurel.
- **Les cotes dynamiques** : Contrairement aux cotes fixes, les cotes finales ne sont déterminées qu'à la clôture des paris. Elles fluctuent en fonction de la répartition des mises sur chaque cheval.
- **L'estimation de p** : Prédire la probabilité de victoire d'un cheval dans une course à plusieurs participants est un problème statistique d'une immense complexité, bien plus difficile que d'évaluer une situation de pile ou face.

# Mécanique du pari mutuel : du pool brut au gain net.

Pour appliquer la formule de Kelly, la variable 'b' (cote nette) doit être calculée à partir des règles du pari mutuel, et non des cotes affichées sur le tableau. Le processus suit une séquence de calculs précise.

## Définitions Clés

- **Pool Brut (Gross Pool)** : La somme totale des mises sur tous les partants.
- **Prélèvement (Takeout)** : Le pourcentage fixe déduit du Pool Brut par l'opérateur.
- **Pool Net (Net Pool)** : Le montant restant après le prélèvement.
- **Masse sur le Gagnant** : La somme des mises placées sur le cheval gagnant.

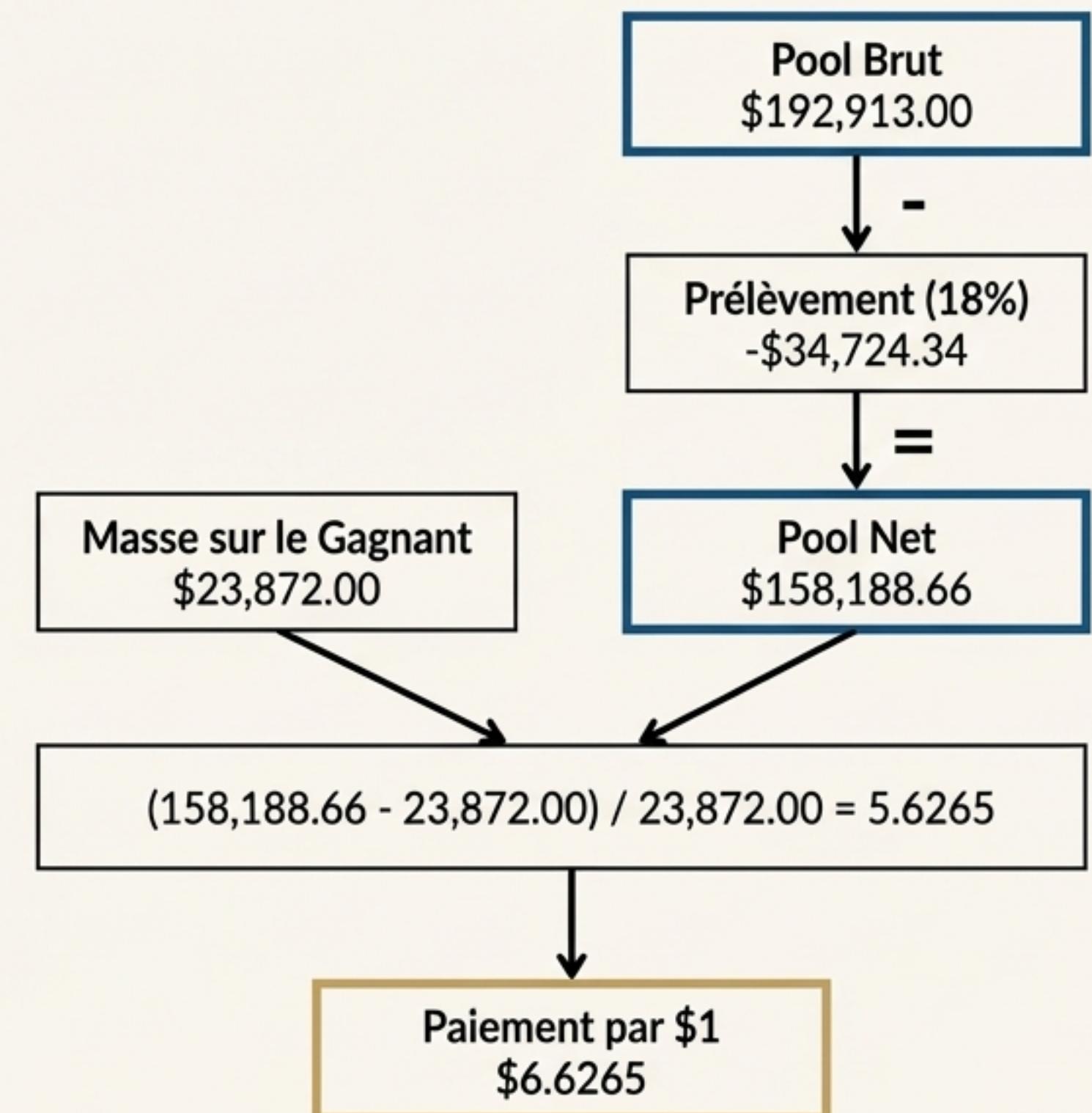
## Calcul du Paiement

Le profit par dollar misé est calculé comme suit :

Profit par Dollar = (Pool Net - Masse sur le Gagnant) / Masse sur le Gagnant

Le paiement total par dollar est donc :

Paiement = Profit par Dollar + 1



# Calcul de la cote nette effective ('b\_eff') pour la formule de Kelly.

La variable 'b' de la formule de Kelly n'est pas la cote affichée, mais le profit net. Elle est calculée à partir du paiement final du pari mutuel.

**Exemple de calcul (basé sur un pool de 100 000 \$) :**

Paramètre du Pool	Valeur (\$)	Calcul / Notes
Pool Brut Total (G)	100 000	Somme de toutes les mises.
Taux de Prélèvement ( $\tau$ )	15.0 %	Commission déduite par l'opérateur.
Pool Net Total (N)	85 000	$G \times (1 - \tau)$
Mises sur le Gagnant	42 500	Mises placées sur le cheval gagnant.
Paiement Décimal	2.00	$\frac{N}{\text{Mises sur le Gagnant}} = \frac{85 000}{42 500}$

**Calcul de 'b\_eff' :**

La cote nette  $b'$  est le paiement décimal moins la mise initiale de 1.

$$b_{eff} = \text{Paiement Décimal} - 1$$

$$b_{eff} = 2.00 - 1 = 1.00$$

Dans ce scénario, la cote nette effective à utiliser dans la formule de Kelly est de 1.00 (équivalent à une cote de 1/1).

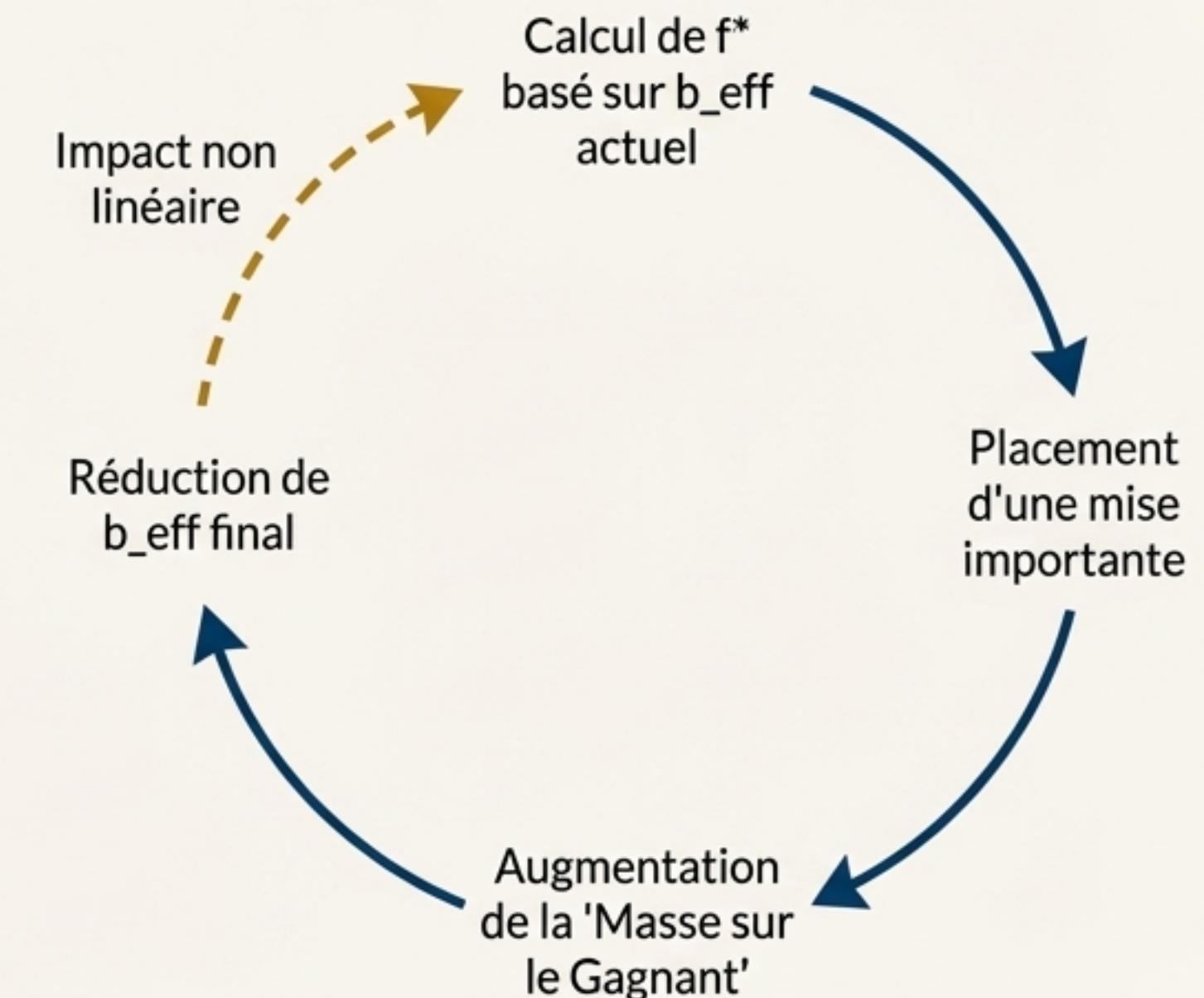
$$f^* = \frac{bp - q}{b}$$

# Le risque endogène : quand votre mise influence sa propre rentabilité.

Une complication majeure du pari mutuel est que les cotes ne sont pas exogènes. Un parieur plaçant un volume de mise important influence directement les cotes finales, et donc la rentabilité de son propre pari.

- **Le mécanisme de feedback** : La formule de Kelly suppose que  $b$  est une variable fixe. Cependant, une mise importante calculée par Kelly ( $f^* \times \text{capital}$ ) augmente la « **Masse sur le Gagnant** ».
- **L'impact sur la cote** : En augmentant le dénominateur dans le calcul du paiement (**Pool Net / Masse sur le Gagnant**), la mise elle-même réduit la cote décimale finale.
- **Le défi de l'optimisation** : La fraction  $f^*$  optimale dépend d'une cote  $b$  qui est elle-même une fonction de  $f^*$ . Cela crée un problème d'optimisation non linéaire.

Un parieur professionnel doit modéliser l'impact marginal de ses mises sur le pool pour ne pas éroder son propre avantage. Dans un marché liquide, l'acte de parier n'est pas passif ; il modifie les conditions mêmes qui ont justifié le pari.

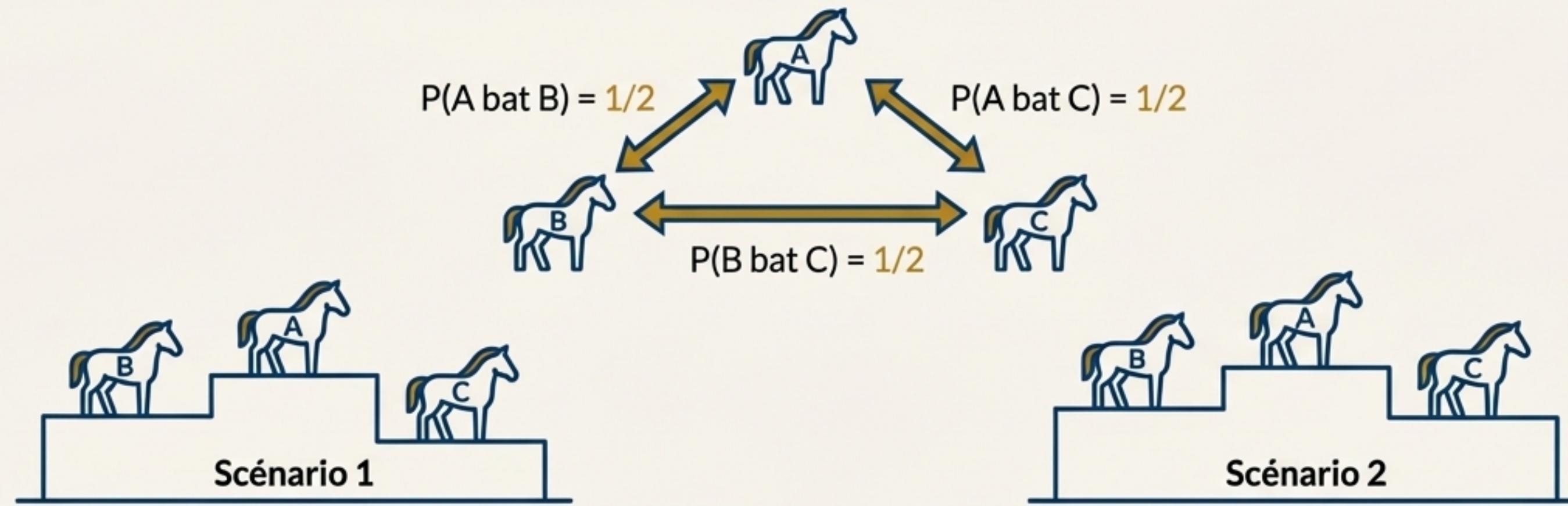


# L'impossible probabilité parfaite : pourquoi les courses ne sont pas des mathématiques simples

L'estimation de la probabilité de victoire **p** est le pilier de la stratégie Kelly. Cependant, dans une course à plusieurs participants, les relations de probabilité sont complexes et non-transitifs.

## Le paradoxe des probabilités par paires :

Savoir que le cheval A bat le cheval B dans 60% des duels, et que B bat C dans 60% des duels, ne permet pas de déterminer la probabilité que A gagne une course à trois.



$$P(A \text{ gagne}) = 1/2 \quad P(B \text{ gagne}) = 1/4 \quad P(C \text{ gagne}) = 1/4$$

$$P(A \text{ gagne}) = 1/3 \quad P(B \text{ gagne}) = 1/3 \quad P(C \text{ gagne}) = 1/3$$

Les mêmes probabilités en duel peuvent mener à des résultats de course très différents, prouvant que des informations supplémentaires sur la **variance** de performance sont nécessaires.

# Au-delà du pari « Gagnant » : les limites de la formule simple

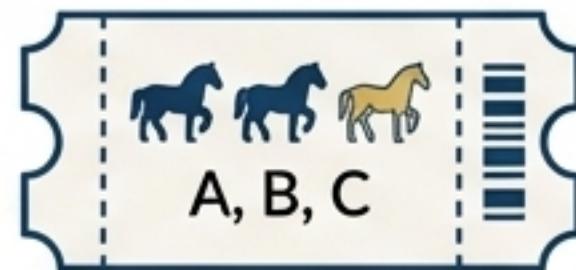
La formule de Kelly  $f^* = (bp - q) / b$  est conçue pour des paris binaires avec un seul scénario de gain. Les paris hippiques offrent des options plus complexes où cette formule n'est pas directement applicable.

## Panneau 1 : Paris « Placé »



$b$  n'est plus unique

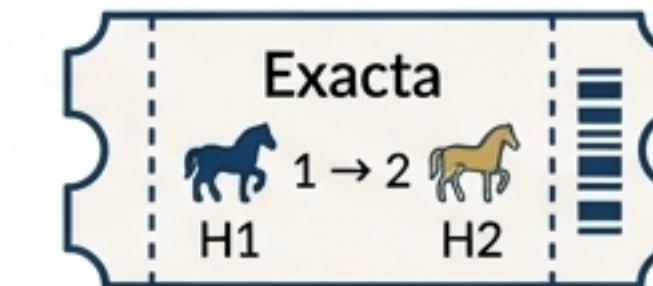
## Panneau 2 : Pari sur plusieurs chevaux (Dutching)



1 000 €	1 000 €	1 000 €
A	B	C

Résultats mutuellement exclusifs

## Panneau 3 : Paris Exotiques (Exacta)



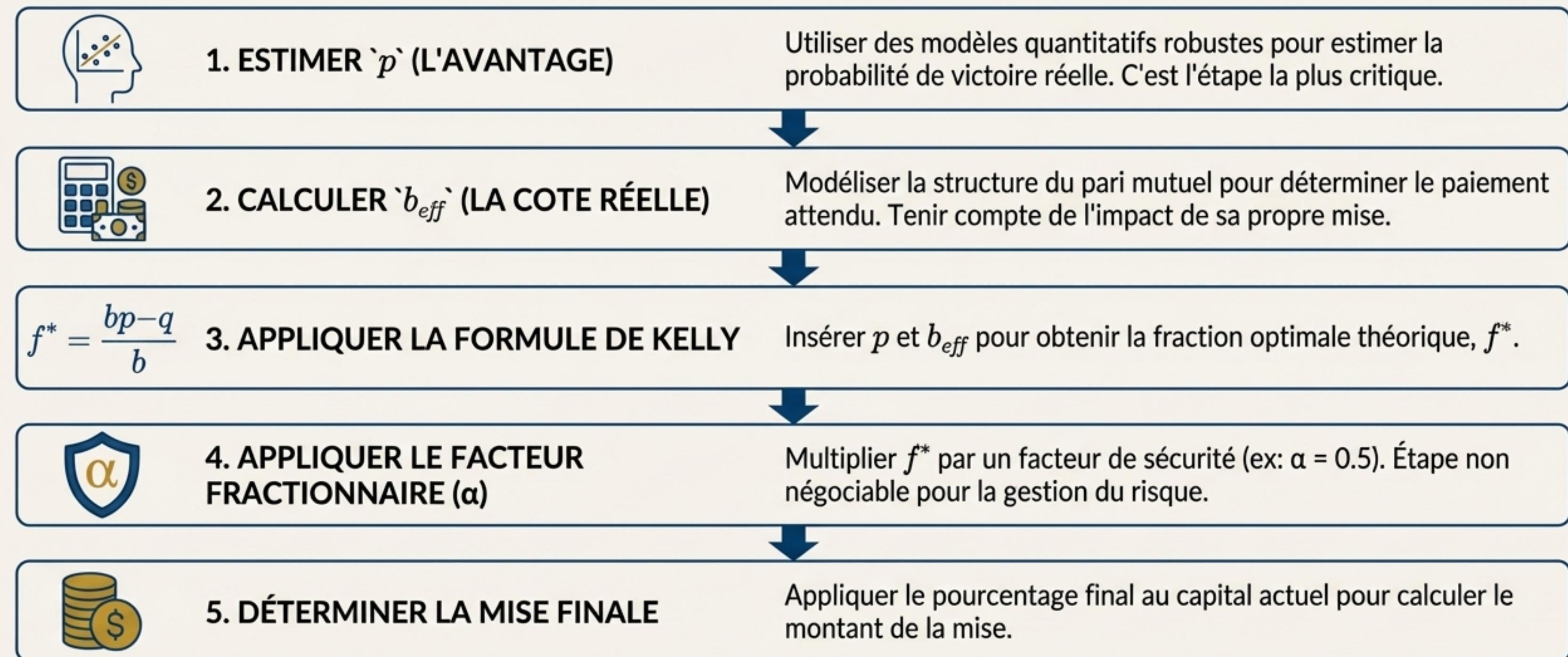
$$P(H1=1^{\text{er}} \cap H2=2^{\text{ème}})$$

Estimation de probabilités conjointes requise

Pour ces cas, une approche de type Kelly doit être étendue à un cadre de gestion de portefeuille multi-actifs, nécessitant des solutions d'optimisation numérique plutôt qu'une simple formule algébrique.

# Le processus du professionnel : un cadre d'application rigoureux.

L'application du Critère de Kelly n'est pas un simple calcul, mais un processus discipliné en plusieurs étapes qui intègre l'analyse, la gestion du risque et l'exécution. Ce cadre permet de passer de la théorie à une décision de mise concrète.



# Au-delà de la formule : le Critère de Kelly comme discipline de pensée.

Le véritable pouvoir du Critère de Kelly ne réside pas dans sa perfection mathématique, mais dans le cadre de discipline qu'il impose. Il force le parieur ou l'investisseur à penser systématiquement en termes d'avantage, de risque et de survie à long terme.

- **Une philosophie du risque** : La maîtrise de Kelly ne consiste pas à calculer ' $f^*$ ' à la perfection, mais à reconnaître l'incertitude de ses estimations et à agir avec une prudence calibrée (Kelly Fractionnaire).
- **La primauté de la survie** : La logique de Kelly, axée sur la croissance géométrique, garantit que la préservation du capital est une priorité. Une stratégie ne peut être rentable à long terme si elle ne survit pas à court terme.
- **La valeur de l'information** : En reliant la croissance du capital au débit d'information, Kelly nous rappelle que notre avantage ne vient que de ce que nous savons et que le marché ignore.

En fin de compte, le Critère de Kelly est moins un outil de prédition qu'un outil de gestion du capital face à un avenir incertain. Le succès ne vient pas de l'audace, mais de l'application rigoureuse et patiente d'un avantage statistique.

**Le taux de croissance exponentiel maximal du capital du parieur est égal au débit d'information du canal.**

